Canons rythmiques
Conjecture spectrale

Milieux : interaction, interfaces, homogénéité, ruptures

Camille Mondon

MP - Informatique

Présentation du problème

Énoncé

Quels apports ont pu, et peuvent encore avoir les canons rythmiques sur des problèmes de pavage tels que la conjecture de Fuglede ?

Positionnement thématique

Mathématiques (Algèbre, Analyse), Informatique (Informatique pratique)

Mots-clés

Théorie de Galois, Pavages de $\mathbb{Z}$, Base de Hilbert

Table des matières

Notion de canon rythmique

Définition 1

Un **canon rythmique** de période $n \in \mathbb{N}$ est un couple (A, B) de parties finies de $\mathbb{N}$ (contenant 0) tels que $(a, b) \in A \times B \mapsto \overline{a + b} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est bijective (on note $A \oplus B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$).

Définition 2

Si A est une partie finie de $\mathbb{N}$ contenant 0, alors on dit que A **pave** s'il existe $B \subset \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que (A, B) soit un canon rythmique de période n.

Un exemple

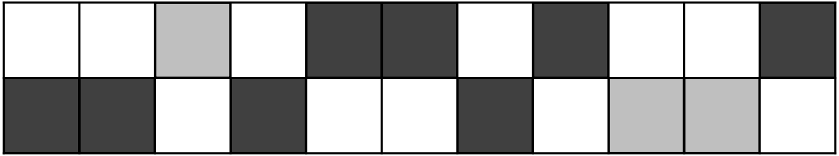

Figure – $A = \{0, 1, 3, 6\}$, $B = \{0, 4\}$ (période 8)

Représentation polynomiale

Définition 3

Soit A une partie finie non vide de $\mathbb{N}$. On note $A(X) = \sum_{k \in A} X^k \in \mathbb{Z}[X]$.

Remarques

- $A(1) = |A|$;
- Si (A, B) est un canon rythmique de période n, alors $n = A(1) \cdot B(1)$.

Quelques propriétés

Propriété 1

$(A \oplus B)(X) = A(X) \times B(X)$

Conséquence

(A, B) est un canon rythmique de période n si, et seulement si :

$$A(X) \times B(X) \equiv 1 + X + \ldots + X^{n-1} \pmod{X^n - 1}$$

Polynômes cyclotomiques

Définition 4

Si $n \in \mathbb{N}^*$, Φ_n est le polynômes unitaire dont les racines sont les racines de l'unité d'ordre n.

Propriété 2

- $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d$
- $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$
- $Si\ p \in \mathcal{P}, \Phi_p = 1 + \ldots + X^{p-1}$
- $\Phi_n = \begin{cases} 0\ si\ n = 1 \\ p\ si\ n = p^\alpha, p \in \mathcal{P}, \alpha \in \mathbb{N}^* \\ 1\ sinon \end{cases}$

Conditions de Coven-Meyerowitz

Définition 5

- $R_A = \{d \in \mathbb{N}, \Phi_d | A(X)\}$, $S_A \subset R_A$ réduit aux puissances de nombres premiers ;
- $(T1)$: $A(1) = \prod_{s \in S_A} \Phi_s(1)$;
- $(T2)$: Si $s_1, \ldots, s_k \in S_A$ sont des puissances de nombres premiers distincts, alors $s_1 \ldots s_k \in R_A$.

Théorème 1 (Coven-Meyerowitz, 1999)

- *(A) : $[(T1)$ et $(T2)] \Rightarrow A$ pave ;*
- *$(B1)$: A pave $\Rightarrow (T1)$;*
- *$(B2)$ (admis) : Si A pave et $A(1)$ n'a que deux facteurs premiers, alors $(T2)$.*

Preuve

Conjecture de FUGLEDE

Définition 6

- Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un borélien de mesure non nulle. On dit que Ω **pave** $\mathbb{R}^n$ **par translations** s'il existe un ensemble discret $T \subset \mathbb{R}^n$ tel que les ensembles $\Omega + t, t \in T$ soient disjoints et $\bigcup_{t \in T} (\Omega + t) = \mathbb{R}^n$ (noté $\Omega \oplus T = \mathbb{R}^n$) ;
- On dit que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est **spectral** s'il existe $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ tel que $\left(x \mapsto e^{2\pi i < \lambda, x >}\right)_{\lambda \in \Lambda}$ soit une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$.

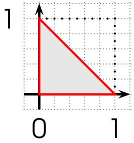

FIGURE – Un triangle n'est jamais spectral dans $\mathbb{R}^2$

Énoncé

Conjecture (FUGLEDE, 1974)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est spectral si, et seulement s'il pave $\mathbb{R}^n$ par translations.

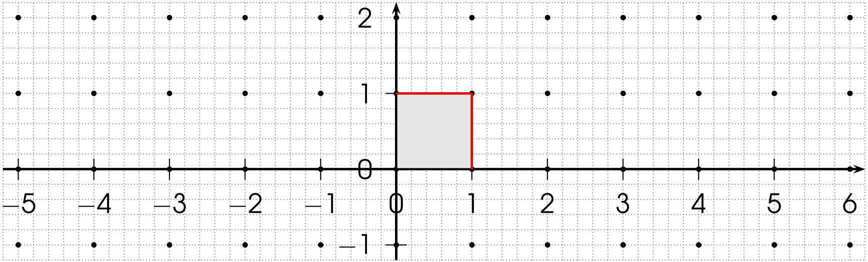

FIGURE – L'exemple le plus simple : $\Omega = [0, 1[^2$, $T = \mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ (FOURIER)

Réfutation partielle

Théorème 2 (Tao, 2003)

Il existe $\Omega \subset \mathbb{R}^5$ (union finie de cubes unitaires), qui soit spectral mais ne pave pas $\mathbb{R}^5$.

Preuve

Remarque

Le sens "spectral $\Rightarrow$ pave" est faux dès la dimension 3.

Pavages sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Z}$

Remarque importante

A pave $\mathbb{Z}$ si, et seulement si $A + [0, 1[$ pave $\mathbb{R}$.

Liens entre $(T1)$ et $(T2)$ et le caractère spectral

Théorème 3 (Łaba, 2000)

- $(T1) + (T2) \Rightarrow$ *spectral*;
- *Spectral* $\Rightarrow (T1)$.

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Pave} & & \\ & \swarrow & \Uparrow & & \\ T1 & \Leftarrow & T1 + T2 & \Rightarrow & T2 \\ & \nwarrow & \Downarrow & & \\ & & \text{Spectral} & & \end{array}$$

Concaténation de canons

Définition 7

Soit (A, B) un canon de période n, $k \in \mathbb{N}^*$. Si $A' = A \oplus \{0, d, \ldots, (k-1)d\}$, alors (A', B) est un canon de période kn (k-concaténation).

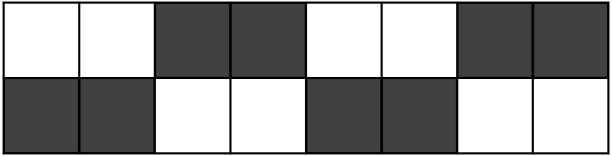

FIGURE – $A = \{0, 1, 4, 5\} = \{0, 1\} \oplus \{0, 4\}$, $B = \{0, 2\}$

Canons de Vuza

Définition 8

- Une partie finie $A \subset \mathbb{N}$ non vide possède une **sous-période** s'il existe $A' \subset A$ et $k, d \geq 2$ tels que $A = A' \oplus \{0, d, \dots, (k-1)d\}$ (dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$). (On a $kd = n$).
- Un canon (A, B) est dit **de Vuza** si ni A ni B ne possèdent de sous-période.

Théorème 4

On peut réduire récursivement tout canon (A, B) par déconcaténation appliquée à l'un des deux termes A ou B, soit à un canon de Vuza*, soit au canon trivial* $(\{0\}, \{0\})$.

Recherche de canons de Vuza

Remarque

Il existe un canon de Vuza de période n si, et seulement si $n = p_1 p_2 n_1 n_2 n_3$ avec p_1, p_2 premiers, $n_1, n_2, n_3 \geq 2$ et $n_1 p_1 \wedge n_2 p_2 = 1$.

Code

```
>>> periodeVuza(500)
[72, 108, 120, 144, 168, 180, 200, 216, 240, 252, 264, 270,
280, 288, 300, 312, 324, 336, 360, 378, 392, 396, 400, 408,
420, 432, 440, 450, 456, 468, 480]
```

Formule de JEDRZEJEWSKI

Propriété 3

Si $n = p_1 p_2 n_1 n_2 n_3$, on pose :

$$K_1 = n_2 n_3 \cdot ([|0, p_2 - 1|] \oplus p_2 n_1 [|0, p_1 - 1|])$$

$$K_2 = n_1 n_3 \cdot ([|0, p_1 - 1|] \oplus p_1 n_2 [|0, p_2 - 1|])$$

$$A = n_3 \cdot (p_2 n_2 [|0, p_1 - 1|] \oplus p_1 n_1 [|0, p_2 - 1|])$$

$$B = K_1 \cup T_1(K_2) \cup \ldots \cup T_{n_3 - 1}(K_2)$$

où $T_j(K_2) = \{j\} + K_2$ (translation par j). Alors (A, B) est un canon de VUZA *de période n.*

Génération de canons de VUZA

Code

```
>>> Vuza(2,3,2,3,2)
([0, 8, 16, 18, 26, 34],
[0, 1, 5, 6, 12, 25, 29, 36, 42, 48, 49, 53])

>>> canon([0,8,16,18,26,34],[0,1,5,6,12,25,29,36,42,48,49,53])
True
```

Algorithme `crible`

Code

```python
def crible(n):
    P=[True]*n
    P[0],P[1]=False,False
    for i in range(2,n):
        k=2
        while k*i<n:
            P[k*i]=False
            k+=1
    return P
```

Algorithme `periodeVuza`

Code

```
def periodeVuza(n):
    P=bool_to_num(crible(n))
    H=[False]*n
    k=0
    while k<len(P) and P[k]<n:
        p1=P[k]
        l=k
        N=p1
        while l<len(P) and N*P[l]<n:
            p2=P[l]
            n1=2
            N*=p2
            while N*n1<n:
                n2=2
                N*=n1
                while N*n2<n:
                    n3=2
                    N*=n2
                    if gcd(p1*n1,p2*n2)==1:
                        while N*n3<n:
                            N*=n3
                            H[N]=True
                            N//=n3
                            n3+=1
                    N//=n2
                    n2+=1
                N//=n1
                n1+=1
            N//=p2
            l+=1
        k+=1
    return bool_to_num(H)
```

Algorithme Vuza

Code

```
def Vuza(p1,p2,n1,n2,n3):
    P1,P2=[1]*p1,[1]*p2
    N1,N2,N3=[1]*n1,[1]*n2,[0]+[1]*(n3-1)

    K1=fois(n2*n3,plus(P2,fois(p2*n1,P1)))
    K2=fois(n1*n3,plus(P1,fois(p1*n2,P2)))

    A=fois(n3,plus(fois(p2*n2,N1),fois(p1*n1,N2)))
    B=union(plus(N3,K2),K1)

    return bool_to_num(A),bool_to_num(B)
```

Algorithme canon

Code

```
def canon(A,B):
    n=len(A)*len(B)
    S=bool_to_num(plus(num_to_bool(A),num_to_bool(B)))
    for k in range(len(S)):
        S[k]= S[k]%n
    return sorted(S)==list(range(n))
```